Ρητές καμπύλες

Μια επίπεδη αλγεβρική καμπύλη $V(f)$ είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου K^2 που μηδενίζουν κάποιο συγκεκριμένο ανάγωγο πολυώνυμο $f \in K[x, y]$, δηλαδή

$$V(f) = \{(x_0, y_0) \in K^2 | f(x_0, y_0) = 0\}.$$

Οι ρητές καμπύλες είναι επίπεδες αλγεβρικές καμπύλες που επιπλέον οι συντεταγμένες των σημείων τους μπορούν να εκφραστούν σαν ρητές συναρτήσεις μιας παραμέτρου t. Ανάμεσα στις επίπεδες καμπύλες είναι οι πιο απλές και έχουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες και εφαρμογές στα Θεωρητικά Μαθηματικά αλλά και στον Γεωμετρικό σχεδιασμό με την βοήθεια Υπολογιστή (*Computer Aided Geometric Design*).

Θεώρημα 0.1 *Μια επίπεδη καμπύλη $V(f)$ λέγεται ρητή αν υπάρχουν ρητές συναρτήσεις $x(t), y(t)$ (δηλ. πηλίκα πολυωνύμων σε μια μεταβλητή t) τέτοια ώστε:*

a) $f(x(t), y(t)) = 0$,

β) για κάθε σημείο (x, y) τέτοιο ώστε $f(x, y) = 0$, εκτός από πεπερασμένες εξαιρέσεις, υπάρχει μοναδικό t τέτοιο ώστε $x = x(t), y = y(t)$.

Οι συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ ορίζονται για όλες τις τιμές του t εκτός από πεπερασμένες τιμές που μηδενίζουν τα πολυώνυμα στους παρανομαστές των $x(t), y(t)$. Η πρόταση β) έχει συγχρόνως δύο διαφορετικές σημασίες:
Είτε μπορεί να υπάρχουν πεπερασμένα σημεία της καμπύλης για τα οποία δεν υπάρχει κανένα τέτοιο t ώστε $x = x(t), y = y(t)$. Είτε μπορεί να υπάρχουν πεπερασμένα σημεία της καμπύλης για τα οποία υπάρχουν περισσότερα από ένα t. Στα παραδείγματα παρακάτω παρουσιάζονται και οι δύο περιπτώσεις.

Παράδειγμα 0.2 Έστω ο κύκλος $V(x^2 + y^2 - 1)$ και η ευθεία που διέρχεται από το σημείο του κύκλου $(0, -1)$ με κλίση t, $y = -1 + tx$. Η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία από τα οποία το ένα είναι το $(0, -1)$ και το άλλο το βρίσκουμε λύνοντας το σύστημα $x^2 + y^2 - 1 = 0$ και $y = -1 + tx$.
Αντικαθιστώντας το y στην $x^2 + y^2 - 1 = 0$ έχουμε:

$$x^2 + (-1 + tx)^2 - 1 = 0$$

δηλαδή $x^2 + 1 + t^2x^2 - 2tx - 1 = 0$ άρα $x((1 + t^2)x - 2t) = 0$. Η $x = 0$ μας δίνει το σημείο $(0, -1)$ που το ξέραμε από την αρχή, ενώ η $(1 + t^2)x - 2t = 0$ μας δίνει το άλλο σημείο τομής, που είναι $x = 2t/1 + t^2$. Τότε όμως $y = -1 + tx = t^2 - 1/1 + t^2$. Άρα

$x = 2t/1 + t^2$ και $y = t^2 - 1/1 + t^2$. Παρατηρούμε ότι οι δύο συναρτήσεις ορίζονται για όλες τις (μιγαδικές) τιμές t του εκτός $t = i$ και $t = -i$. Επίσης

$$f(x(t), y(t)) = (2t/1 + t^2)^2 + (t^2 - 1/1 + t^2)^2 - 1 = 0.$$

Τέλος για κάθε σημείο (x_0, y_0) του κύκλου υπάρχει μοναδικό $t_0 = y_0 + 1/x_0$ τέτοιο ώστε $x = x(t), y = y(t)$, εκτός από το $(0, 1)$ γιατί αντιστοιχεί σε μη πεπερασμένη κλίση. Άρα ο κύκλος είναι ρητή καμπύλη.

Παράδειγμα 0.3 Θα δείξουμε ότι η υπερβολή $V(x^2 - y^2 - 1)$ είναι ρητή καμπύλη. Θεωρούμε την οικογένεια ευθειών που διέρχονται από το σημείο $(1, 0)$ της καμπύλης με κλίση t, δηλαδή ευθείες της μορφής $y = t(x-1)$. Η κάθε μια ευθεία από αυτές τέμνει την υπερβολή σε δύο σημεία. Το ένα είναι το $(1, 0)$ και το άλλο το βρίσκουμε λύνοντας το αντίστοιχο σύστημα όπως στο προηγούμενο παράδειγμα και έχουμε ότι $x(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}$ και $y(t) = \frac{2t}{t^2-1}$. Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε τις συνθήκες του ορισμού για ρητές καμπύλες. Παρατηρούμε ότι οι δυο ρητές συναρτήσεις ορίζονται για όλες τις τιμές του t εκτός από $t = 1$ και $t = -1$. Για τις τιμές αυτές, οι δύο αντίστοιχες ευθείες αυτής της οικογένειας είναι παράλληλες με τις δύο ασύμπτωτες ευθείες της υπερβολής, τις $V(x-y)$ και $V(x+y)$, και τέμνουν την υπερβολή μόνο στο σημείο $(1, 0)$. Θα δούμε αργότερα, όταν θα εργαζόμαστε στο Προβολικό επίπεδο, ότι και αυτές οι ευθείες τέμνουν την υπερβολή σε δύο σημεία η καθεμία. Το ένα είναι το $(1, 0)$ και το άλλο βρίσκεται στο άπειρο.

Παρατήρηση Η διαδικασία που ακολουθήσαμε στα προηγούμενα δύο παραδείγματα μπορεί να επαναληφθεί για οποιαδήποτε κωνική τομή (δηλαδή δευτεροβάθμια) καμπύλη. Δηλαδή, θεωρώντας μια οικογένεια ευθειών που διέρχονται από ένα σημείο μιας κωνικής με κλίση t, μπορούμε να έχουμε μια περιγραφή των σημείων της κωνικής με ρητές συναρτήσεις. Όλες, λοιπόν, οι κωνικές καμπύλες (ελλείψεις, παραβολές, υπερβολές) είναι ρητές καμπύλες.

Παράδειγμα 0.4 Θα δείξουμε ότι η τριτοβάθμια καμπύλη $V(y^2 - x^3 - x^2)$ είναι ρητή. Αν θεωρήσουμε ευθείες με κλίση t που διέρχονται από τυχαίο σημείο της καμπύλης παρατηρούμε ότι τέμνουν την καμπύλη σε δύο ακόμη σημεία (τρία συνολικά, όσα και ο βαθμός). Δηλαδή σε κάθε τιμή της παραμέτρου αντιστοιχούν δύο σημεία της καμπύλης, οπότε είναι αδύνατο με αυτό τον τρόπο να περιγράψουμε τα σημεία της καμπύλης ως ρητές συναρτήσεις της t. Η καμπύλη αυτή όμως έχει ένα ιδιαίτερο σημείο, το σημείο $(0, 0)$, που ξεχωρίζει από τα υπόλοιπα και που αργότερα θα το ονομάσουμε ιδιόμορφο. Στο σημείο αυτό η καμπύλη αυτοτέμνεται. Θα θεωρήσουμε, λοιπόν, την οικογένεια ευθειών που διέρχονται από το σημείο αυτό με κλίση t, δηλαδή τις ευθείες $y = tx$. Λύνοντας το σύστημα $y^2 - x^3 - x^2 = 0$ και $y = tx$ έχουμε ότι το σημείο $(0, 0)$ είναι διπλή λύση του συστήματος. Η άλλη λύση του συστήματος αντιστοιχεί στο σημείο με συντεταγμένες $x(t) = t^2 - 1$ και $y(t) = t^3 - t$. Παρατηρούμε ότι για κάθε σημείο της καμπύλης (x_0, y_0) υπάρχει μοναδικό t τέτοιο ώστε $(x_0, y_0) = (t^2 - 1, t^3 - t)$, εκτός από το σημείο $(0, 0)$.

Στο σημείο $(0,0)$ αντιστοιχούν δύο τιμές του t, η $t=1$ και η $t=-1$. Κατά κάποιο τρόπο το σημείο $(0,0)$ θεωρείται διπλό σημείο της καμπύλης και η καμπύλη στο σημείο αυτό έχει δύο εφαπτομένες με κλίσεις $t=1$ και $t=-1$.

Παράδειγμα 0.5 Η τεταρτοβάθμια καμπύλη $V(xy+(x^2+y^2)^2)$ είναι ρητή. Αν εργαστούμε όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα θα δούμε ότι οι οικογένειες ευθειών που διέρχονται από τυχαίο σημείο της καμπύλης τέμνουν την καμπύλη σε τρία ακόμη σημεία (σε 4 συνολικά, επειδή η καμπύλη είναι τετάρτου βαθμού). Η καμπύλη αυτή έχει ιδιόμορφο σημείο στην αρχή των αξόνων, στο σημείο $(0,0)$. Αν όμως θεωρήσουμε την οικογένεια των ευθειών με κλίση t που διέρχονται από την αρχή των αξόνων $y=tx$, θα δούμε ότι τέμνουν την καμπύλη σε δύο ακόμη σημεία.
Στην περίπτωση αυτή για να βρούμε μια παραμετρική μορφή της καμπύλης θεωρούμε τις τομές της καμπύλης με την οικογένεια κύκλων $x^2+y^2-ty=0$. Λύνοντας το σύστημα $xy+(x^2+y^2)^2=0$ και $x^2+y^2-ty=0$ έχουμε $xy+t^2y^2=0$, δηλαδή $y=0$ ή $y=\frac{-x}{t^2}$ αν $t\neq 0$. Αν $y=0$ τότε και $x=0$. Αν $y=\frac{-x}{t^2}$ τότε $x=\frac{-t^3}{t^4+1}$. Άρα $y=\frac{t}{t^4+1}$. Συνεπώς η καμπύλη είναι ρητή και το τυχαίο σημείο της περιγράφεται από $x(t)=\frac{-t^3}{t^4+1}$ και $y(t)=\frac{t}{t^4+1}$.

Παρατήρηση Στα παραπάνω παραδείγματα αναζητούμε μια ρητή περιγραφή των συντεταγμένων μιας ρητής καμπύλης. Η ιδέα που υπάρχει πίσω από αυτά τα παραδείγματα είναι να θεωρήσει κανείς κατάλληλες οικογένειες καμπυλών. Δηλαδή οικογένειες που στις εξισώσεις τους υπάρχει μια παράμετρος t, και τέμνουν την καμπύλη σε κάποια σημεία από τα οποία μόνο ένα μεταβάλλεται με την παράμετρο t και τα υπόλοιπα να είναι σταθερά σημεία της καμπύλης. Στην πραγματικότητα η ύπαρξη μιας τέτοιας οικογένειας κάνει την καμπύλη ρητή. Θα δούμε παρακάτω ότι δεν είναι όλες οι επίπεδες αλγεβρικές καμπύλες ρητές (και άρα δεν υπάρχουν πάντα τέτοιες οικογένειες καμπυλών).

Παράδειγμα 0.6 Θα ξαναδούμε το παράδειγμα του κύκλου $V(x^2+y^2-1)$. Αντί για οικογένεια ευθειών θεωρούμε μια οικογένεια κωνικών που τέμνει τον κύκλο σε τέσσερα σημεία από τα οποία τα τρία είναι σταθερά για όλες τις καμπύλες της οικογένειας. Παραδείγματος χάρη την οικογένεια $V(x^2+xy+ty^2+(t-1)y-1)$. Κάθε μια από αυτές τις καμπύλες τέμνουν τον κύκλο σε τέσσερα σημεία από τα οποία τα τρία είναι τα $(1,0)$,$(-1,0)$ και $(0,-1)$.
Λύνοντας το σύστημα $x^2+y^2-1=0$ και $x^2+xy+ty^2+(t-1)y-1=0$ βρίσκουμε το τέταρτο σημείο τομής που είναι το

$$x(t)=\frac{2(1-t)}{1+(1-t)^2},\ y(t)=\frac{1-(1-t)^2}{1+(1-t)^2}.$$

Το αντίστροφο της παραπάνω διαδικασίας είναι: Δίνεται η παραμετρική μορφή μιας καμπύλης και ζητείται το πολυώνυμο που την ορίζει. Π.χ. να βρεθεί η καμπύλη που έχει παραμετρική μορφή $x(t)=t^3-1$ και $y(t)=\frac{t^2}{t^2+1}$. Στην περίπτωση αυτή σχηματίζουμε δύο πολυώνυμα ως προς t με συντελεστές από το $R[x,y]$, στο παράδειγμά μας τα

$t^3 - 1 - x$ και $t^2(y-1)+y$, και στη συνέχεια απαλείφουμε το t χρησιμοποιώντας την απαλοίφουσα. Στο παράδειγμά μας η απαλοίφουσα είναι $y^3 + (y-1)^3(1+x)^2$.
Βρείτε το πολυώνυμο f που ορίζει την ρητή καμπύλη με παραμετρική μορφή $x(t) = t^2 - 1$, $y(t) = t^3 - 2t + 1$.

Εφαρμογές των ρητών καμπυλών στον υπολογισμό της τομής δύο καμπυλών.

Αν γνωρίζουμε ότι από δύο καμπύλες η μια τουλάχιστον είναι ρητή είναι εύκολο να βρούμε τα κοινά σημεία των δύο καμπυλών. Έστω $V(f)$, $V(g)$ δύο καμπύλες όπου η $V(f)$ είναι ρητή, δηλαδή οι συντεταγμένες των σημείων της περιγράφονται από δύο ρητές σηναρτήσεις $x(t)$,$y(t)$. Θέλουμε να βρούμε τα κοινά σημεία των δύο καμπυλών, δηλαδή το σύνολο $V(f,g)$. Ένα κοινό σημείο είναι σημείο της $V(f)$ άρα είναι της μορφής $(x(t), y(t))$, και είναι και σημείο της $V(g)$ άρα οι συντεταγμένες των σημείων του ικανοποιούν την $g(x,y) = 0$. Άρα για ένα κοινό σημείο έχουμε $g(x(t), y(t)) = 0$. Απαλείφοντας τους παρανομαστές καταλήγουμε σε ένα πολυώνυμο ως προς t. Οι ρίζες του πολυωνύμου δίνουν τα σημεία τομής των δύο καμπυλών. Η μέθοδος αυτή έχει όμως ένα μειονέκτημα, επειδή η παραμετρική μορφή της $V(f)$ περιγράφει ολα τα σημεία της $V(f)$ εκτός πιθανόν απο πεπερασμένα σε πλήθος, στην περίπτωση που κάποιο απο αυτά είναι και σημείο της καμπύλης $V(g)$ η προηγούμενη μέθοδος δεν μπορεί να το βρεί.

Παράδειγμα 0.7 Να βρεθούν όλα τα κοινά σημεία των δύο καμπυλών $V(x^2+y^2-1)$ και $V(y^2 - x^3 - x^2)$. Η δεύτερη καμπύλη (όπως και η πρώτη) είναι ρητή και τα σημεία της είναι της μορφής (t^2-1, t^3-t). Άρα για να βρούμε τα κοινά σημεία πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $(t^2-1)^2 + (t^3-t)^2 - 1 = 0$. Μετά από πράξεις καταλήγουμε στο πολυώνυμο $t^2(t^4 - t^2 - 1) = 0$ που έχει έξι ρίζες: μια διπλή την $t = 0$ και τις τέσσερις $t = \pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$
Κάθε μια από αυτές δίνει ένα σημείο τομής ,π.χ. για $t = 0$ έχουμε το σημείο $(-1, 0)$. Συνεπώς οι δύο καμπύλες έχουν έξι κοινά σημεία (το ένα διπλό).

Εφαρμογές των ρητών καμπυλών σε γεωμετρικό σχεδιασμό.

Οι ρητές καμπύλες χρησιμεύουν σε σχεδιασμό αντικειμένων (π.χ. τμήματα αυτοκινήτων, ρουχισμού ή και γραμματοσειρών) με την βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή, (*Computer Aided Geometric Design*, *CAGD*). Οι σχεδιαστές χρειάζονται καμπύλες που να έχουν μεγάλη ποικιλία μορφής, εύκολες στην περιγραφή και γρήγορες στο σχεδιασμό. Υπάρχουν ρητές καμπύλες που έχουν τα χαρακτηριστικά αυτά. Θα περιγράψουμε μια τέτοια οικογένεια ρητών καμπυλών που φέρουν το όνομα του *Bezier*, ενός Γάλλου μηχανικού της *Renault*, που χρησιμοποιούνται στο *CAGD*. Η παραμετρική τους μορφή είναι

$$x(t) = (1-t)^3 x_1 + 3t(1-t)^2 x_2 + 3t^2(1-t)x_3 + t^3 x_4,$$
$$y(t) = (1-t)^3 y_1 + 3t(1-t)^2 y_2 + 3t^2(1-t)y_3 + t^3 y_4.$$

Η παραπάνω καμπύλη διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) (για $t = 0$) και (x_4, y_4) (για $t = 1$), ενώ για τιμές του t μεταξύ 0 και 1 το τμήμα της καμπύλης βρίσκεται μέσα στο τετράπλευρο με κορυφές $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$. Επίσης η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο (x_1, y_1) είναι ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ και η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο (x_4, y_4) είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(x_3, y_3), (x_4, y_4)$. Τα τέσσερα σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ λέγονται σημεία ελέγχου της καμπύλης.
Οι σχεδιαστές χρησιμοποιούν πολλά διαφορετικά τμήματα από καμπύλες του *Bezier*, ενώνοντάς τις κατάλληλα, για να σχεδιάσουν πιο πολύπλοκες καμπύλες. Το πρόγραμμα *Corel Draw* χρησιμοποιεί καμπύλες του *Bezier* και μπορείτε αλλάζοντας τα δύο ενδιάμεσα σημεία να δείτε την ποικιλία των μορφών που μπορεί να πάρουν οι καμπύλες του *Bezier*.

Εφαρμογές των ρητών καμπυλών στην Θεωρία Αριθμών.

Ένα από τα κλασικά προβλήματα της Θεωρίας των Αριθμών είναι η εύρεση των πυθαγορείων τριάδων. Μια τριάδα θετικών ακέραιων αριθμών (X, Y, Z) λέγεται πυθαγόρεια τριάδα αν ισχύει $X^2 + Y^2 = Z^2$. Μια τριάδα (X, Y, Z) λέγεται αρχική όταν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των X, Y, Z είναι το 1, μκδ(X, Y, Z)=1. Από μια αρχική τριάδα (X, Y, Z) μπορούμε να πάρουμε άπειρες πυθαγόρειες τριάδες τις (dX, dY, dZ), και από οποιαδήποτε πυθαγόρεια τριάδα μπορούμε να πάρουμε μια αρχική, διαιρώντας με τον μκδ(X, Y, Z). Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να βρούμε όλες τις αρχικές πυθαγόρειες τριάδες.

Έστω (X, Y, Z) μια αρχική πυθαγόρεια τριάδα. Τότε οι X, Y δεν είναι και οι δύο άρτιοι, (γιατί αν $2|X$ και $2|Y$ τότε από την $X^2+Y^2 = Z^2$ το $2|Z$, άρα $2|1 = mkd(X, Y, Z)$ άτοπο). Επίσης οι X, Y δεν είναι ποτέ και οι δύο περιττοί, (γιατί αν $X \equiv 1 mod 2$ και $Y \equiv 1 mod 2$, τότε $X^2 \equiv 1 mod 4$ και $Y^2 \equiv 1 mod 4$, άρα $Z^2 \equiv 2 mod 4$, που είναι αδύνατο γιατί το τετράγωνο ενός άρτιου αριθμού είναι $0 mod 4$ και το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι $1 mod 4$). Άρα ο ένας από τους X, Y είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο X είναι άρτιος. Αν θέσουμε $x = \frac{X}{Z}$ και $y = \frac{Y}{Z}$ η σχέση $X^2 + Y^2 = Z^2$ γίνεται $x^2 + y^2 = 1$, δηλαδή τα x, y είναι ρητοί και είναι συντεταγμένες σημείων του κύκλου. Αλλά ξέρουμε ότι ο κύκλος είναι ρητή καμπύλη και οι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου δίνονται από $x = \frac{2t}{1+t^2}$ και $y = \frac{t^2-1}{1+t^2}$. Παρατηρούμε ότι αν t είναι ρητός τότε και x, y είναι ρητοί. Επίσης αν x, y ρητοί τότε και

t ρητός αφού $t = \frac{1+y}{x}$.
Αν t είναι ρητός, είναι πηλίκο δύο θετικών ακεραίων u, v και μπορούμε να υποθέσουμε οτι ο μκδ(u, v)=1 . Αντικαθιστώντας έχουμε $x = \frac{X}{Z} = \frac{2uv}{u^2+v^2}$ και $y = \frac{Y}{Z} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$, όπου $u \geq v \geq 0$, για να είναι τα x, y θετικά. Άρα $X(u^2+v^2) = Z2uv, Y(u^2+v^2) = Z(u^2-v^2)$ και επειδή μκδ(X, Z)=μκδ(Y, Z)=μκδ(X, Y, Z)=1, αφού $X^2 + Y^2 = Z^2$, καταλήγουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος w τέτοιος ώστε: $wX = 2uv, wY = u^2 - v^2 wZ = u^2 + v^2$. Το w διαιρεί το $u^2 - v^2$ και το $u^2 + v^2$ άρα και το $2u^2$ και $2v^2$. Αλλά οι u, v είναι ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους άρα το w διαιρεί το 2, άρα $w = 1$ ή $w = 2$.
Θα δούμε ότι αποκλείεται το w να είναι 2. Έστω ότι $w = 2$, τότε αφού X άρτιος από την $wX = 2uv$ έχουμε ότι το 2 διαιρεί το uv άρα u ή v άρτιος. Όμως οι u, v είναι πρώτοι μεταξύ τους άρα ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Αλλά τότε $u^2 + v^2$ περιττός και $2Z = u^2 + v^2$, που είναι άτοπο. Άρα $w = 1$ και έτσι έχουμε:

Θεώρημα 0.8 *(Ευκλείδης) Όλες οι αρχικές πυθαγόρειες τριάδες με X άρτιο, είναι της μορφής $X = 2uv, Y = u^2 - v^2, Z = u^2 + v^2$, όπου u, v είναι ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους με τον ένα απο τους δύο άρτιο και τον άλλο περιττό.*

Για παράδειγμα αν $u = 2$ και $v = 1$ έχουμε την αρχική πυθαγόρεια τριάδα $(4, 3, 5)$. Αν $u = 3$ και $v = 2$ τότε έχουμε την αρχική πυθαγόρεια τριάδα $(12, 5, 13)$. Και αν $u = 1204$ και $v = 1071$ έχουμε την μη αρχική πυθαγόρεια τριάδα $(2578968, 302575, 2596657)$.

Ασκήσεις

1. Στο επίπεδο $(Z_3)^2$ να βρείτε όλα τα σημεία του κύκλου
$$V(x^2 + y^2 - 1).$$
Πόσες ευθείες του επιπέδου δεν τέμνουν τον κύκλο και ποιές·

2. Η ευθεία $V(ax + by + c)$ για $c \neq 0$ παραμετρικοποιείται από $x(t) = bt + s$, $y(t) = -at + r$ όπου (s, r) είναι τυχαίο σημείο της. Βρείτε μια άλλη παραμετρικοποίηση της ευθείας θεωρώντας ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων με κλίση t.

3. Δείξτε ότι η κυβική καμπύλη
$$V(x^3 + x^2 + y^2) \subset R^2$$
είναι ρητή. Θεωρείστε ευθείες με κλίση t που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Σχεδιάστε την καμπύλη στο επίπεδο R^2.

4. Δείξτε ότι η υπερβολή
$$V(x^2 - y^2 - a^2) \subset R^2$$
είναι ρητή καμπύλη.

5. Δείξτε ότι η κυβική καμπύλη $V(y^2 - x^3)$ είναι ρητή. Θεωρείστε ευθείες με κλίση t που να διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

6. Δείξτε ότι η τεταρτοβάθμια καμπύλη

$$V((x^2 + y^2)^2 - y(3x^2 - y^2)) \subset R^2$$

είναι ρητή.

7. Δείξτε ότι η τεταρτοβάθμια καμπύλη

$$V(y^2 - x^2(x^2 - 1)) \subset R^2$$

είναι ρητή θεωρώντας τις τομές της καμπύλης με την οικογένεια παραβολών

$$V(y - tx(x - 1)).$$

8. Δείξτε ότι η έκτου βαθμού καμπύλη

$$V(x^6 - x^2y^3 - y^5) \subset R^2$$

είναι ρητή.

9. Βρείτε τρεις τριάδες θετικών ακεραίων αριθμών (X, Y, Z) με μκδ$(X, Y, Z) = 1$ τέτοιες ώστε

$$X^2 + Y^2 = 5Z^2.$$

10. Δείξτε ότι δεν υπαρχει τριάδα θετικών ακεραίων αριθμών (X, Y, Z) με μκδ$(X, Y, Z) = 1$ τέτοια ώστε

$$X^2 + Y^2 = 3Z^2.$$

11. Δείξτε ότι αν (a, b, c) είναι μια αρχική πυθαγόρεια τριάδα με $a < b < c$ τότε $(c?a)(c?b)/2$ είναι τέλειο τετράγωνο.